



TP Sage : Substitutions et courbes fractales

ÉCOLE JEUNES CHERCHEURS EN INFORMATIQUE MATHÉMATIQUE
Mercredi 21 mars 2012

Le but de ce TP est de dessiner des courbes fractales en utilisant des substitutions.

1 Codages de chemins

Avant toute chose, on va apprendre à dessiner des chemins représentés par des mots. Par exemple, étant donné le codage suivant :

$$a : (1, 0) \quad A : (-1, 0) \quad b : (0, 1) \quad B : (0, -1),$$

le mot `abaaBA` désigne le chemin $\square \leftarrow$ (nous nous passerons d'une définition formelle). En Sage, les mots sont représentés par la classe `Word`, le mot `abaaBA` s'écrit `Word("abaaBA")`. Le codage donné ci-dessus peut être représenté par le dictionnaire

$$\{ "a": (1, 0), "A": (-1, 0), "b": (0, 1), "B": (0, -1) \}.$$

Exercice 1. Écrivez une fonction `word_to_path(D, w)` qui renvoie la liste des sommets du chemin associé au mot `w` en utilisant le dictionnaire `D`. (Par exemple, avec le dictionnaire ci-dessus, la liste correspondant au mot `abaaBA` est $[(0, 0), (1, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (3, 0), (2, 0)]$.)

Remarque. Vous pouvez travailler soit avec des couples d'entiers (comme ci-dessus), soit avec des vecteurs (en utilisant la fonction `vector`), soit avec des nombres complexes (note : le nombre i s'écrit `I`). L'avantage des vecteurs et des nombres complexes est que l'on peut les additionner entre eux, contrairement aux couples d'entiers.

Exercice 2. Dessinez quelques chemins en utilisant la fonction `line` de Sage.

2 Substitutions et courbes fractales

Une *substitution* est une application qui remplace chaque lettre d'un mot par un mot, comme par exemple $a \mapsto ab, b \mapsto bA, A \mapsto AB, B \mapsto Ba$. On peut naturellement itérer une substitution :

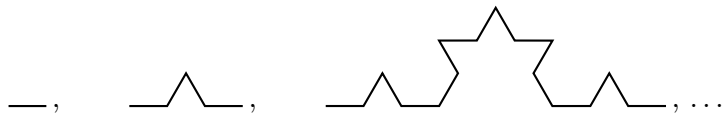
$$a \mapsto ab \mapsto abbA \mapsto abbAbAAB \mapsto abbAbAABbAABABBa \mapsto \dots$$

En Sage, les substitutions sont représentées par la classe `WordMorphism`. La substitution ci-dessus s'écrit `WordMorphism("a->ab,b->bA,A->AB,B->Ba")` et s'utilise ainsi :

```
sage: s = WordMorphism("a->ab,b->bA,A->AB,B->Ba")
sage: w = Word("a")
sage: s(w)
word: ab
sage: s(w,5)
word: abbAbAABbAABABBaABBaBaab
```

Exercice 3. En utilisant les fonctions `word_to_path` et `line`, dessinez et contemplez les courbes associées aux mots que l'on obtient en itérant la substitution `s`. Faites de même sur d'autres exemples en modifiant substitution `s`.

Exercice 4. Le *flocon de Koch* est une courbe fractale obtenue en itérant la transformation :



a) Dessinez le flocon de Koch en utilisant une substitution bien choisie et le dictionnaire

$$\begin{array}{lll} \mathbf{a} : (1, 0) & \mathbf{b} : \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = e^{\frac{i\pi}{3}} & \mathbf{c} : \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}} \\ \mathbf{A} : (-1, 0) & \mathbf{B} : \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) & \mathbf{C} : \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \end{array}$$

b) Pouvez-vous reconnaître la figure obtenue en utilisant ce dictionnaire et la substitution `WordMorphism("a->baC, b->abc, c->AcB, A->cAB, B->CBA, C->BCa")` ?

3 Frontière des fractals de Rauzy

On travaille maintenant avec le dictionnaire

$$\begin{array}{lll} \mathbf{a} : \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{7i\pi}{6}} & \mathbf{b} : \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{11i\pi}{6}} & \mathbf{c} : (0, 1) \\ \mathbf{A} : \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) & \mathbf{B} : \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) & \mathbf{C} : (0, -1). \end{array}$$

Exercice 5. a) Observez les courbes obtenues en itérant la substitution $a \rightarrow c, b \rightarrow Ca, c \rightarrow Cb, A \rightarrow C, B \rightarrow Ac, C \rightarrow Bc$ à partir du mot `aBcAbC`.

b) Écrivez une fonction `cancellation(w)` qui supprime toutes les occurrences des mots `aA, Aa, bB, Bb, cC, Cc` dans le mot `w` (en réitérant la procédure jusqu'à ce que `w` ne contienne plus aucune occurrence de l'un de ces mots).

c) Comparez les courbes obtenues en a) avec les courbes obtenues en appliquant la fonction `cancellation` aux images itérées de la substitution. Si tout s'est bien passé, vous avez dessiné la frontière du *fractal de Rauzy* associé à la substitution de Tribonacci.

d) Dessinez les courbes associées à des modifications de la substitution ci-dessus. Certaines auront un comportement « très mauvais », et correspondent à des fractals de Rauzy aux propriétés topologiques moins dociles que l'exemple vu en c).

4 Aller plus loin

- Pour jouer avec d'autres exemples : http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_fractals_by_Hausdorff_dimension
- Tout cela est fortement lié aux L-systèmes (évoqués dans le cours de lundi), que vous pouvez vous amuser à programmer : <http://en.wikipedia.org/wiki/L-system>
- Sage contient la classe `WordPaths` (avec laquelle vous pouvez jouer), qui est une implémentation d'une grande partie des choses faites dans ce TP.