

# Calcul formel en robotique

Michel Coste – IRMAR (Rennes, FR)

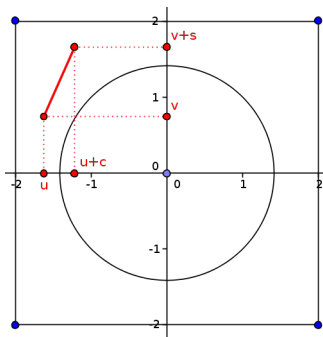
École Jeunes Chercheurs en Informatique Mathématique,  
Rennes, 19–23 mars 2012

# Plan

- 1 Planification de mouvement
  - Modélisation algébrique
  - Décomposition cylindrique algébrique
  - Cartes routières, alternatives
  
- 2 Robots parallèles
  - Modèle Géométrique Direct (MGD)
  - Singularités

## Espace des configurations

Exemple : barre se déplaçant dans un domaine plan.



Une modélisation polynomiale :  
ensemble des  $(u, v, c, s) \in \mathbb{R}^4$   
vérifiant

- $c^2 + s^2 = 1$ ,
- $-2 < u, u + c, v, v + s < 2$ ,
- pour tout  $t$  tel que  $0 \leq t \leq 1$

$$(u + tc)^2 + (v + ts)^2 > 1$$

Deux points de l'espace des configurations peuvent-ils être joints par un chemin continu à l'intérieur de cet espace ? Si oui, donner un tel chemin.

## Semi-algébriques

- *Ensemble semi-algébrique* : partie de  $\mathbb{R}^n$  définie par une combinaison booléenne d'équations et d'inégalités polynomiales.
- Stabilité par union et intersection finies, passage au complémentaire, produit cartésien.
- Stabilité par projection (*Tarski-Seidenberg*). Tout ce qui est définissable par une formule (obtenue à partir d'équations et d'inégalités polynomiales en utilisant les connecteurs logiques et les quantifications sur les variables réelles) est semi-algébrique. Exemple :  $\{(b, c) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists x \ x^2 + bx + c = 0\}$  est décrit par  $b^2 - 4c \geq 0$ .
- Fonction semi-algébrique : graphe semi-algébrique.
- L'espace des configurations de l'exemple est semi-algébrique.

# Décomposition cylindrique algébrique (DCA)

Idée : décomposer un semi-algébrique en morceaux simples (“cellules”  $\simeq$  pavés ouverts).

DCA de  $\mathbb{R}^n$  : partition finie de  $\mathbb{R}^n$  en cellules semi-algébriques, donnée par :

$n = 1$  : une subdivision finie  $a_1 < \dots < a_\ell$  de  $R$ .

**Cellules** : les  $\{a_i\}$   $0 < i \leq \ell$  et les intervalles  $]a_i, a_{i+1}[$ ,  $0 \leq i \leq \ell$  ( $a_0 = -\infty$ ,  $a_{\ell+1} = +\infty$ ).

$n > 1$  : une DCA de  $\mathbb{R}^{n-1}$  et des fonctions semi-algébriques continues  $\zeta_{D,1} < \dots < \zeta_{D,\ell(D)} : D \rightarrow \mathbb{R}$  pour chaque cellule  $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ .

**Cellules** : les graphes des  $\zeta_{D,i}$ , et les tranches  $]\zeta_{D,i}, \zeta_{D,i+1}[$ ,  $0 \leq i \leq \ell(D)$  du cylindre  $D \times R$  coupées par ces graphes.

## DCA adaptée

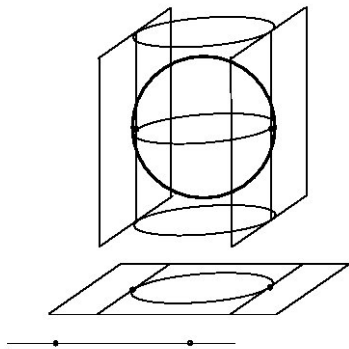


FIGURE: DCA adaptée à  
 $X^2 + Y^2 + Z^2 - 1$

DCA *adaptée* à un ensemble fini de polynômes  $\{P_1, \dots, P_k\}$  : chaque  $P_i$  garde un signe constant ( $> 0$ ,  $< 0$  ou  $= 0$ ) sur chaque cellule.

Algorithme de calcul d'une DCA de  $\mathbb{R}^n$  adaptée.

- Entrée :  $P_1, \dots, P_k$
- Sortie : cellules de la DCA, pour chaque cellule un point test et les signes de  $P_i$

Outils : (sous)-résultants  
(élimination de variables).

## Cartes routières

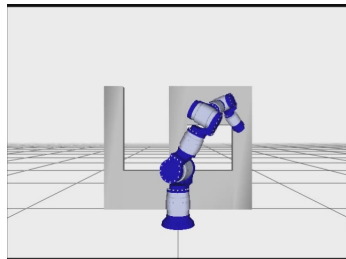
Une carte routière permet de planifier un chemin (par exemple, dans l'espace des configurations d'un robot).

- Carte routière d'un semi-algébrique  $S$  : courbe semi-algébrique  $C \subset S$  telle que tout point de  $S$  peut être facilement relié à  $C$  dans  $S$  et que deux points quelconques de  $C$  reliables dans  $S$  peuvent être reliés en suivant  $C$ .
- L'algorithme de DCA (avec des options permettant d'obtenir les relations d'adjacence de cellules) permet de construire algorithmiquement une carte routière pour un semi-algébrique (par exemple un espace de configuration d'un robot) : solution algorithmique au problème de planification du mouvement.
- Grosse limitation : le coût de la DCA (doublement exponentiel en le nombre de variables  $(kd)^{O(1)^n}$ ).

## Améliorations et alternatives

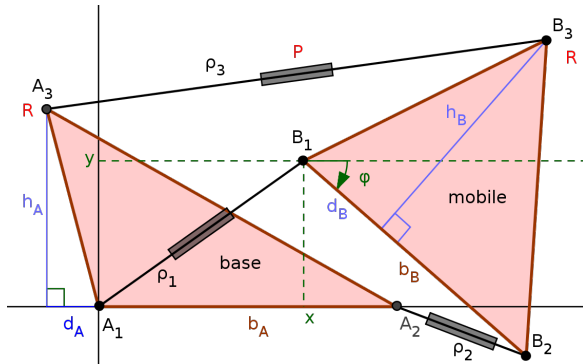
DCA pour faire une carte routière : pas une bonne idée. Il y a des algorithmes moins coûteux de géométrie algébrique réelle pour ça : simplement exponentiel (record actuel exposant en  $n\sqrt{n}$ ) au lieu de doublement exponentiel.

Autres méthodes que le calcul formel. Méthodes probabilistes (Rapidly exploring Random Tree) : échantillonnage de l'espace de configurations, construction d'un graphe en essayant de connecter un point de l'échantillon à quelques voisins proches.





## Un robot parallèle : 3-RPR plan



3 jambes de longueurs  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  variables (articulation prismatique **P** motorisée) reliées à la base et à la plate forme mobile par des articulations rotoïdes passives (**R**).

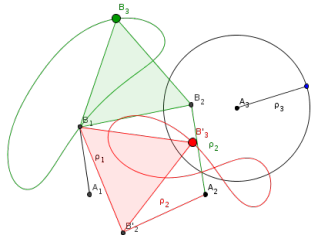
# Espaces et applications

- *Espace de travail* : espace des déplacements dans le plan (3 degrés de liberté). Éléments : poses. Coordonnées :  $\varphi, x, y$ .
- *Espace articulaire* : longueurs des trois jambes  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ .
- *Modèle Géométrique Inverse* (MGI) :  
Espace de travail  $\rightarrow$  Espace articulaire.

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \left(x^2 + y^2\right)^{1/2} \\ \rho_2 &= \left((x + b_B \cos \varphi - b_A)^2 + (y + b_B \sin \varphi)^2\right)^{1/2} \\ \rho_3 &= \left((x + d_B \cos \varphi - h_B \sin \varphi - d_A)^2 \right. \\ &\quad \left. + (y + d_B \sin \varphi + h_B \cos \varphi - h_A)^2\right)^{1/2}\end{aligned}\tag{1}$$

# Modèle Géométrique Direct (MGD)

- *MGD* : étant donné  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ , résoudre le système (1) en  $\varphi, x, y$ . Problème de degré 6 : 0, 2 4 ou 6 solutions réelles (avec multiplicité). Solutions : *modes d'assemblage*.



- Partitionner l'espace articulaire en fonction du nombre de solutions du MGD peut se faire par une DCA : l'ensemble des  $(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$  où le nombre de solutions réelles de (1) est fixé est semi-algébrique.

# Singularités et Jacobien du MGI

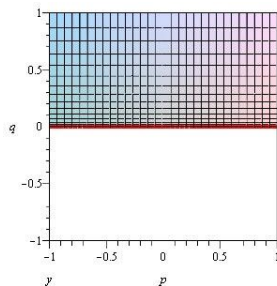
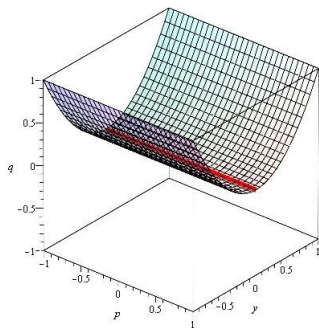
Singularités parallèles : quand des solutions du MGD disparaissent.

**Danger pour le robot !**

- *Déterminant Jacobien* du MGI (Jac) : déterminant  $3 \times 3$ ,  
 $i$ -ème ligne  $\frac{\partial \rho_i}{\partial \varphi} \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial x} \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial y}$
- Une solution  $(\varphi_0, x_0, y_0)$  du MGD peut être suivie continûment pour des petites modifications de  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  ssi  $\text{Jac}(\varphi_0, x_0, y_0) \neq 0$ .
- *Poses singulières* :  $(\varphi, x, y)$  tels que  $\text{Jac}(\varphi, x, y) = 0$ . Ils forment la surface de singularités dans l'espace de travail. Image par le MGI : surface de singularités dans l'espace articulaire.

# Changement non singulier de mode d'assemblage

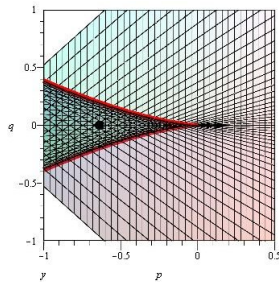
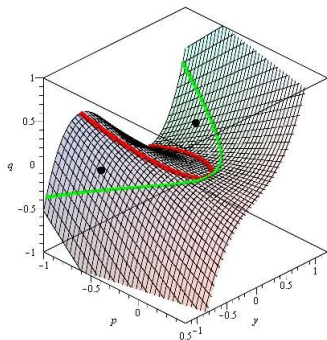
Peut-on passer d'une solution du MGD à une autre sans rencontrer une singularité? On ne peut pas traverser un pli...



$p = p, q = y^2$  : deux solutions du MGD se confondent.

## Changement non singulier de mode d'assemblage (2)

...mais on peut tourner autour d'un cusp (fronce).



$p = p, q = y^3 + py$  : trois solutions du MGD se confondent.  
Détection des cusps ?